

MODELOS FRACCIONARIOS PARA LA DESCRIPCIÓN DEL TRANSPORTE DE SOLUTOS EN COLUMNAS DE SUELO

F. San José¹, Y. A. Pachepsky², F.J. Taguas¹

¹ Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería Agronómica, Universidad Politécnica de Madrid, Av. de la Complutense s/n, 28042 Madrid, fernando.sanjose@upm.es, fj.taguas@upm.es.

² USDA-ARS-BA-ANRI-EMSL, Beltsville, MD 20705, USA ypachepsky@anri.barc.usda.gov.

RESUMEN. El modelo basado en la ecuación de advección-dispersión es el comúnmente aceptado a la hora de determinar el transporte de solutos en el suelo. Este modelo describe la dispersión a partir de la ley de Fick. Desde un punto de vista microscópico, esta ley equivale a considerar que el movimiento de las partículas de soluto puede ser simulado con el movimiento Browniano. Desde casi el principio de la aplicación de estos modelos, se han descrito importantes discrepancias entre los datos experimentales y sus predicciones. En la década de los noventa se propuso un nuevo modelo para describir los movimientos de las partículas de soluto: los vuelos de Lévy (“Lévy flights”, Lf). Estos dan lugar a una dispersión no-Fickiana que puede ser descrita mediante ecuaciones con derivadas fraccionarias: las ecuaciones fraccionarias de advección-dispersión. Los Lf incluyen como un caso particular los modelos clásicos de advección-dispersión del mismo modo que los movimientos Brownianos son un caso particular de los vuelos de Lévy. El objetivo de este trabajo es evaluar estos nuevos modelos comparando sus predicciones con las que proporcionan los modelos clásicos. Para ello, hemos utilizado datos publicados de experimentos de transporte en columnas de suelo.

ABSTRACT. The classic model to describe solute transport in soil is based on the advective-dispersive equation, in which Fick’s law is used to explain dispersion. From the microscopic point of view, this is equivalent to considering that the motion of the particles of solute can be simulated by the Brownian motion. Since the beginning of the introduction of these types of modelsn discrepancies between experimental and predicted data have been reported. During the last decade of the twentieth century a new model to describe the motion of the solute particles was proposed: the Lévy flights (Lf). This allows to describe non-Fickian dispersion through fractional derivatives: the fractional advective-dispersive equations. This model includes, as a particular case, the classic ones, as the Brownian motion is a particular case of Lf. The goal of this work was to evaluate and to compare these fractional models with their classic counterpart to published data on solute transport in soil columns.

1.- Introducción

Dos son los mecanismos considerados dominantes a la hora de modelizar el transporte de solutos en la zona no saturada del suelo, la advección y la dispersión. La advección es asociada al flujo promedio de agua en el espacio poroso del suelo. La dispersión es entendida como un proceso similar al de difusión a través de la ley de Fick y es una consecuencia de la hipótesis de que el movimiento Browniano es un modelo aceptable para el movimiento de las partículas de soluto. Entonces (Bhattacharya y Gupta, 1990), la ecuación parabólica de advección-dispersión

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v \frac{\partial c}{\partial x} \quad (1)$$

es el modelo matemático unidimensional que proporciona la evolución temporal de la concentración de un soluto inerte en estado estacionario. En esta ecuación, c es la concentración, $[ML^{-3}]$, D es la dispersión, $[L^2T^{-1}]$, v es la velocidad promedio en el interior del espacio poroso, $[LT^{-1}]$, x es la distancia, $[L]$, y t es el tiempo $[T]$. Este modelo ha sido utilizado, por ejemplo, para determinar los parámetros del transporte de solutos inertes en estado estacionario en columnas de suelo. En este tipo de experimentos, se introduce una determinada concentración de soluto de forma continua o simulando un pulso, registrando la curva de salida. Esta curva corresponde a las concentraciones de salida observadas en el otro extremo de la columna como una función del tiempo (Jury y Flühler, 1992). Tras determinar las condiciones iniciales y de contorno correspondientes a la situación experimental que se pretende estudiar se obtienen las soluciones (analíticas o numéricas) del problema de contorno con valores iniciales de la Ec. (1). Los parámetros del transporte son entonces determinados por el ajuste de las curvas experimentales de salida a las curvas de salida producidas por el modelo. Este ajuste puede hacerse mediante un algoritmo tipo Marquardt-Levenberg, por ejemplo (van Genuchten 1981).

Desde la introducción de este modelo clásico, diversos trabajos han puesto de manifiesto las discrepancias entre los datos experimentales y sus predicciones. Véase, por ejemplo el trabajo de Berkowitz et al (2006) y las referencias bibliográficas citadas en él. El modelo clásico captura adecuadamente el comportamiento de los solutos en

medios homogéneos. Sin embargo el espacio poroso del suelo presenta heterogeneidades a todas las escalas como pone de manifiesto la extrema variabilidad de la distribución espacial de la porosidad o de la conductividad hidráulica así como de las propiedades bioquímicas del suelo.

Se ha observado (Khan y Jury, 1990) que la dispersividad, cociente de la dispersión, D , y la velocidad media, v , tiende a crecer con la distancia (dependencia de la dispersividad con la escala) y que la concentración de salida en fases avanzadas del proceso presenta valores superiores a los descritos por la teoría (la curva de salida presenta colas gruesas) (van Genuchten y Wierenga, 1976). Este tipo de situaciones suele calificarse como procesos de difusión anómala o de dispersión no Fickiana.

El modelo clásico descansa sobre la hipótesis de que el movimiento Browniano es aceptable para describir el movimiento de las partículas de soluto. Esta hipótesis es la que genera la Ec. (1) (Bhattacharya y Gupta, 1990). Sin embargo, la heterogeneidad y complejidad del espacio poroso del suelo provoca una serie de modificaciones del movimiento de dichas partículas que conducen a una mayor presencia de partículas que viajan con velocidades superiores a la media a lo largo de relativamente largas distancias en comparación con el comportamiento de las partículas animadas de un movimiento Browniano. Así mismo, un número importante de partículas viajan a velocidades inferiores a la media experimentando largos tiempos de espera en zonas inmóviles del fluido hasta que pueden sumarse a la dirección general del movimiento del flujo. Este tipo de comportamientos puede ser simulado con los vuelos de Lévy. Estos movimientos constituyen un marco conceptual que contiene a los movimientos Brownianos y la persistencia en el movimiento de las partículas de soluto así como desviaciones significativas de la media que son más pronunciadas que en los Brownianos (Bouchard 1995).

Utilizando la hipótesis de que los movimientos de las partículas de soluto pueden ser simulados por los vuelos de Lévy es posible obtener una ecuación que describe la evolución de la concentración de soluto a base de derivadas fraccionarias (Compte 1996). La versión unidimensional de la ecuación fraccionaria de advección-dispersión para dispersión simétrica es

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -v \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{1}{2} D_f \left(\frac{\partial^\alpha c}{\partial_+ x^\alpha} + \frac{\partial^\alpha c}{\partial_- x^\alpha} \right). \quad (2)$$

En esta ecuación, c es la concentración, $[ML^{-3}]$, D_f es la dispersión fraccionaria, $[L^2T^{-1}]$, α es el orden de derivación fraccionaria, $1 < \alpha \leq 2$, v es la velocidad promedio en el interior del espacio poroso, $[L^{\alpha T^{-1}}]$, x es la distancia, $[L]$, y t es el tiempo $[T]$. Las derivadas fraccionarias son operadores integro-diferenciales (Samko et al. 1993). El operador correspondiente a la derivada por la izquierda es

$$\frac{\partial^\alpha c}{\partial_+ x^\alpha}(x,t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \int_A^x (x-z)^{m-\alpha-1} c(z,t) dz \quad (3)$$

y

$$\frac{\partial^\alpha c}{\partial_- x^\alpha}(x,t) = \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \int_x^B (z-x)^{m-\alpha-1} c(z,t) dz \quad (4)$$

es el correspondiente a la derivación fraccionaria por la derecha. En estas expresiones m es un entero que verifica $m-1 < \alpha \leq m$, Γ es la función gamma y, A y B corresponden a los extremos del rango de variación de la distancia x . En caso de que se pretenda modelizar la migración de contaminantes en una columna de suelo, el primer extremo corresponde a parte de la columna por donde se introduce la disolución y el segundo a la parte de la columna por donde se registran las concentraciones de salida. Es de destacar que este modelo recoge el modelo clásico como caso particular cuando $\alpha = 2$.

Los modelos fraccionarios han sido utilizados para simular la migración de solutos en suelos a escala de laboratorio y de campo (Benson, 1998; Pachepsky et al., 2000; Benson et al. 2001; Zhang et al. 2005). En la mayor parte de estos trabajos se han utilizado soluciones analíticas de la Ec. (2) para el problema de valores iniciales en un dominio infinito. Sin embargo, modelos más ajustados a la realidad requieren soluciones con problemas de contorno en dominios finitos y, por lo tanto, la obtención de soluciones numéricas se hace necesaria.

El objetivo de este trabajo es comparar el modelo clásico y el fraccionario a la hora de caracterizar el movimiento de solutos en columnas de suelo inalterado. Para ello hemos utilizado soluciones numéricas de la Ec. (2) junto con condiciones de contorno que conservan la masa. Hemos seleccionado datos publicados de curvas de salida correspondientes a experimentos de transporte de trazadores inertes en columnas de suelo y hemos determinado los parámetros del transporte y el orden de derivación fraccionaria α mediante un algoritmo de ajuste tipo Marquardt-Levenberg.

2.- Teoría: soluciones numéricas y obtención de los parámetros del transporte

Hemos utilizado la definición de Grünwald (Meerschaert y Tadjeran, 2006) de las derivadas fraccionarias por la izquierda y por la derecha para obtener un esquema numérico explícito de la Ec. (2). Designaremos por L la longitud de la columna de suelo. Por lo tanto, hemos de construir un esquema numérico en el intervalo de extremos 0 y L para valores del tiempo mayores que un cierto valor inicial que tomaremos igual a cero. Para cada entero positivo M consideraremos los puntos $x_i = ih$, $0 \leq x_i \leq L$, para $i=0,1,\dots,M$ y $h=L/M$. Además se definen los instantes $t_n = n\Delta t$ y las concentraciones $c_i^n = c(x_i, t_n)$. Las aproximaciones de Grünwald con desplazamiento introducidas por Meerschaert y Tadjeran (2006) para la

derivación fraccionaria por la izquierda

$$\frac{\partial^\alpha c}{\partial_+ x^\alpha}(x_i, t_n) \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^M g_k c(x_i - (k-1)h, t_n) \quad (5)$$

y para derivación fraccionaria por la derecha

$$\frac{\partial^\alpha c}{\partial_- x^\alpha}(x_i, t_n) \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^M g_k c(x_i + (k-1)h, t_n) \quad (6)$$

Junto con un esquema numérico en diferencias finitas explícito

$$\frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} = -v \frac{c_i^n - c_{i-1}^n}{h} + \frac{D_{sf}}{2h^\alpha} \left\{ \sum_{k=0}^M g_k c_{i-k-1}^n + \sum_{k=0}^M g_k c_{i+k-1}^n \right\}, \quad (7)$$

proporcionan la siguiente aproximación de la concentración en los puntos internos del intervalo espacial para los diferentes instantes de tiempo

$$c_i^{n+1} = B \sum_{k=0}^{i+1} g_k c_{i-k+1}^n + E c_{i-1}^n + (1-E)c_i^n + B \sum_{k=0}^{M-i+1} g_k c_{i+k-1}^n + \Delta t s_i^n \quad (8)$$

En esta expresión $B = D\Delta t / 2h^\alpha$ y $E = v\Delta t / h$. La condición de estabilidad de este esquema numérico es $v\Delta t / h + \alpha D\Delta t / h^\alpha \leq 1$. Para $\alpha = 2$ la Ec. (8) coincide con un esquema numérico en diferencias finitas explícito para la Ec. (1) cuando se utiliza la aproximación de la derivada segunda por la diferencia central segunda.

Hemos considerado condiciones de contorno que conservan la masa total de soluto en el interior de la columna (San José Martínez et al. 2005).

El proceso de ajuste ha sido llevado a cabo para valores del orden de derivación α equidistantes con un incremento de 0.05 dentro del intervalo $1 < \alpha \leq 2$. Para cada uno de estos valores se ha utilizado un algoritmo tipo Marquardt-Levenberg (van Genuchten 1981) para obtener los parámetros del transporte, D y v , minimizando la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de los errores (*RMSE*)

$$RMSE = \sqrt{\sum_{j=1}^N (c_j^{sim} - c_j^{med})^2 / N} \quad (9)$$

En esta expresión, N es el número de valores medidos de las concentraciones de salida, c_j^{med} es la concentración medida en el instante j y c_j^{sim} es la concentración simulada por el modelo para ese mismo instante. Para cada curva de salida de cada experimento se ha obtenido el valor del error promedio (*RMSE*) como función del parámetro α . La Fig. 1 recoge a modo de ejemplo la variación de *RMSE* con el parámetro alfa para dos tipos de suelo (Rao et

al. 1976) con distintas condiciones experimentales. El valor de α que minimiza el error determina el tipo de modelo que mejor representa los datos experimentales. Cuando $\alpha = 2$ será el modelo clásico el que mejor explique el comportamiento del sistema, cuando resulte $1 < \alpha < 2$, será el modelo fraccionario puro el que mejor determine el transporte. En la Fig. 1 se muestra un caso en el que el modelo clásico se ajusta mejor y otro en el que el modelo fraccionario con $\alpha = 1,70$ es el que produce el mejor ajuste.

3.- Datos experimentales

Hemos utilizado datos publicados de 53 curvas de salida correspondientes a 7 experimentos de transporte de trazadores en columnas de suelo (Nielsen, y Biggar, 1961; Biggar y Nielsen, 1962; Cassel et al. 1974; Rao et al. 1976; McMahon y Thomas, 1974; Seyfried y Rao, 1987; Jardine et al., 1993). La longitud y diámetro de las columnas varía entre 0.1 y 0.84 m y entre 0.035 y 0.30 m, respectivamente. Se han utilizado columnas de suelo alterado (reempacutado) e inalterado con una amplia variedad de texturas y tipos de suelo. Los trazadores inyectados en las columnas fueron clorhídrico, tritio y bromuro y óxido nítrico. Diferentes niveles de saturación fueron considerados. Las velocidades promedio de la disolución en variaron entre 5.56E-08 y 8.17E-05 m s⁻¹.

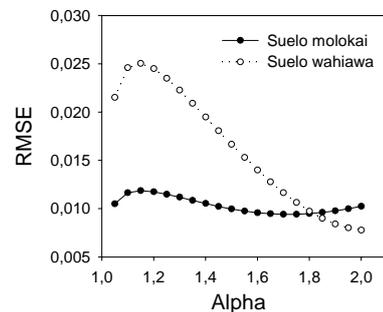


Fig. 1. Variación del *RMSE* con alfa para dos tipos de suelo (Rao et al. 1976). En el suelo molokai las curvas de salida fueron obtenidas con una solución de tritio a una velocidad promedio de 1.62E-05 m s⁻¹ y un contenido de agua de 0.626 mientras que en el suelo wahiawa la velocidad promedio de la solución de tritio fue de 1.90E-05 m s⁻¹ y el contenido de agua fue de 0.644. En el primer caso el alfa óptimo fue 1.70 y en el segundo 2.00. Los valores de *RMSE* fueron 0,009 y 0,008, respectivamente.

4.- Resultados y discusión

Como conclusión general de este estudio se puede afirmar que el modelo fraccionario, como marco general que incluye el modelo clásico, simula adecuadamente los datos experimentales utilizados correspondientes al transporte de solutos en columnas de suelo. De las 53 curvas de salida consideradas, 31 fueron ajustadas con un error promedio menor de 0.019 siendo 0.072 el mayor error promedio obtenido.

En la Fig. 2 se muestra, a modo de ejemplo, el ajuste que

se obtiene con el alfa óptimo para una columna (Biggar y Nielsen, 1962) donde se inyectó un pulso continuo de tritio con diferentes contenidos de agua manteniendo constante la velocidad promedio de la disolución en el interior de la columna.

En 28 curvas experimentales se obtuvo un valor del orden de derivación menor de 2, siendo igual a 2 en los restantes 25 casos. Este dato parece sugerir la necesidad de los modelos fraccionarios como un marco general para estudiar el transporte de solutos en suelos. La variación del valor de α podría ser una indicación de los diferentes grados de complejidad del movimiento de las partículas de soluto en el interior del suelo. Las causas de estos diferentes tipos de comportamiento podrían estar relacionadas con las diferentes estructuras jerárquicas del espacio poroso de cada columna. Uno de los futuros desafíos en este campo está constituido por la exploración de la relación que liga estas dos cuestiones: orden de derivación fraccionaria y estructura del espacio poroso del suelo.

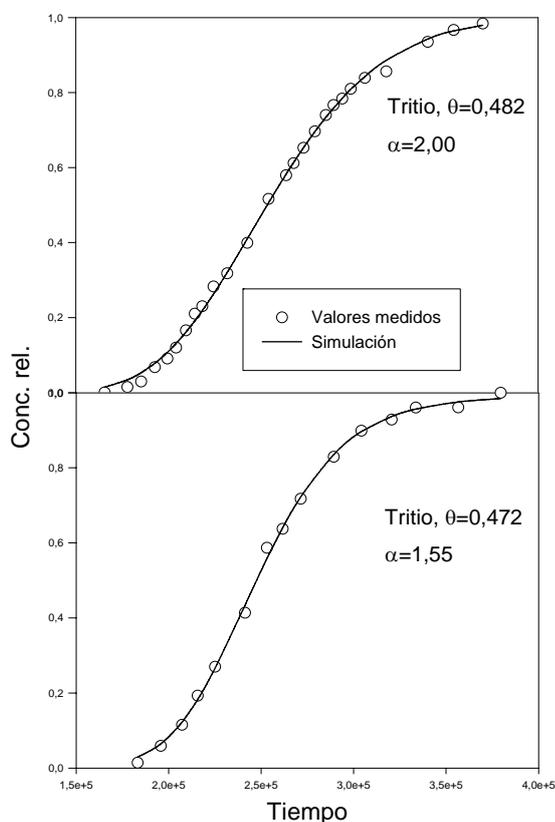


Fig. 2. Ajuste de las curvas de salida. Valores medidos (Biggar y Nielsen, 1962) (círculos) y curva simulada (línea continua) de las curvas de salida para dos contenidos de agua diferentes ($\theta=0.482$ y $\theta=0.472$, respectivamente) con velocidad promedio de $5.56E-07 \text{ m s}^{-1}$, inyectando tritio como trazador. El mejor ajuste se obtiene con un modelo clásico ($\alpha=2.00$) cuando $\theta=0.482$ y con un modelo fraccionario ($\alpha=1.55$) cuando $\theta=0.472$. En ambos casos el error promedio (RMSE) fue 0.013.

Los valores óptimos de α varían con el tipo de suelo, el tipo de soluto, la velocidad del fluido y el grado de saturación (véase Tabla 1 y 2). En términos genéricos no se

puede afirmar que el tipo de suelo determine un valor del orden de derivación fraccionaria: diferentes valores fueron obtenidos al variar las condiciones del transporte.

Cuando se utilizó tritio se obtuvieron en general valores mayores de α que cuando se utilizó clorhídrico. Este es el caso de los experimentos realizados por Biggar y Nielsen (1962) y McMahon y Thomas (1974). El clorhídrico se ve afectado por la exclusión de aniones que produce un decrecimiento de su concentración en la vecindad de las superficies cargadas de las partículas. Por lo tanto, es probable que el clorhídrico y el tritio no cuenten con el mismo espacio disponible para su tránsito por el suelo lo que podría causar la variación del orden de derivación fraccionaria observada.

Tabla 1. (Continúa en la Tabla 2) Condiciones experimentales seleccionadas y alfa óptimo estimado para las curvas de salida estudiadas en este trabajo.

Soluto	Velocidad (m s ⁻¹)	Contenido de Saturado agua	Alfa óptimo	
Biggar y Nielsen 1962				
Clorhídrico	5.56E-07	No	0.482	1.90
Tritio	5.56E-07	No	0.482	2.00
Clorhídrico	5.56E-07	No	0.472	1.15
Tritio	5.56E-07	No	0.472	1.55
Cassel et al. 1974				
Ox. Nítrico	5.56E-08	No	0.391	1.20
Clorhídrico	5.56E-08	No	0.391	1.05
Ox. Nítrico	5.56E-08	No	0.324	1.15
Clorhídrico	5.56E-08	No	0.324	1.45
Ox. Nítrico	5.56E-08	No	0.378	1.85
Clorhídrico	5.56E-08	No	0.378	1.85
Ox. Nítrico	5.56E-08	No	0.346	2.00
Clorhídrico	5.56E-08	No	0.346	1.95
McMahon y Thomas 1974				
Clorhídrico	4.84E-07	Si	0.338	1.75
Tritio	4.84E-07	Si	0.338	1.15
Clorhídrico	4.84E-07	Si	0.339	2.00
Tritio	4.84E-07	Si	0.339	1.55
Tritio	4.84E-07	Si	0.324	2.00
Clorhídrico	4.84E-07	Si	0.324	1.75
Tritio	4.84E-07	Si	0.335	1.65
Clorhídrico	4.84E-07	Si	0.335	2.00
Clorhídrico	4.84E-07	Si	0.384	2.00
Tritio	4.84E-07	Si	0.384	1.60
Clorhídrico	4.84E-07	Si	0.396	1.30
Tritio	4.84E-07	Si	0.396	1.05
Rao et al. 1976				
Tritio	1.62E-05	Si	0.626	1.70
Tritio	1.90E-05	Si	0.644	2.00

Ha sido observado que, en general, en suelos desaturados los valores de α tienden a ser inferiores a 2. Esta tendencia

es particularmente clara en las curvas de salida de los trabajos de Biggar y Nielsen (1962), Cassel et al. (1974) y Jardine et al. (1993). Es probable que un descenso del grado de saturación de un suelo genere recorridos más complejos para la migración de solutos una vez que se hayan vaciado los poros mayores que dominan el transporte en los suelos con un alto grado de saturación. Este fenómeno podría actuar modificando las características del transporte lo que podría explicar los cambios detectados en el valor de α .

Tabla 2. (Continuación de la Tabla 1) Condiciones experimentales consideradas y alfa óptimo estimado para las curvas de salida estudiadas en este trabajo.

Soluto	Velocidad (m s ⁻¹)		Contenido de agua	Alfa óptimo
		Saturado		
Nielsen y Biggar 1961				
Clorhídrico	1.11E-07	Si	Sin datos	2.00
Clorhídrico	5.25E-06	Si	Sin datos	1.20
Clorhídrico	1.50E-07	Si	Sin datos	2.00
Clorhídrico	6.92E-06	Si	Sin datos	2.00
Clorhídrico	7.78E-07	No	0.270	1.15
Clorhídrico	7.50E-07	No	0.330	1.15
Clorhídrico	8.33E-07	No	0.360	1.15
Clorhídrico	4.28E-06	No	0.170	2.00
Clorhídrico	4.92E-06	No	0.340	2.00
Jardine et al. 1993				
Bromuro	2.24E-05	No	0.549	2.00
Bromuro	4.18E-06	No	0.533	2.00
Bromuro	5.04E-07	No	0.513	1.15
Bromuro	8.48E-08	No	0.419	1.15
Seyfried y Rao 1987				
Tritio	7.33E-05	Si	0.570	2.00
Tritio	7.50E-06	Si	0.570	2.00
Tritio	5.42E-05	Si	0.570	2.00
Tritio	1.64E-05	Si	0.550	2.00
Tritio	3.33E-06	Si	0.530	2.00
Tritio	5.56E-07	Si	0.520	1.75
Tritio	7.97E-05	Si	0.600	2.00
Tritio	3.61E-06	Si	0.590	1.50
Tritio	5.47E-05	Si	0.550	2.00
Tritio	4.72E-06	Si	0.520	2.00
Tritio	8.17E-05	Si	0.540	2.00
Tritio	2.50E-06	Si	0.520	2.00
Tritio	6.86E-05	Si	0.530	2.00
Tritio	5.83E-06	Si	0.510	1.80

En las curvas analizadas es habitual encontrar una tendencia al crecimiento de α con el aumento de la velocidad del movimiento de la disolución en el interior de la columna. Este es el caso de de los experimentos llevados a cabo por Nielsen y Biggar (1961), Rao et al. (1976) y Jardine et al. (1993). En el trabajo de Seyfried y Rao se puede observar una correspondencia entre valores próximos a 1 de α y bajas velocidades promedio de la disolución.

Estas observaciones pueden estar relacionadas con el hecho de que a un mismo grado de saturación, el crecimiento de la velocidad del fluido debería producir en una separación más nítida del espacio poroso en zonas de movimiento lento y zonas de movimiento rápido y, por lo tanto, mayores posibilidades de que α tome valores cercanos a 2.

5.- Conclusiones

Los modelos fraccionarios constituyen un marco apropiado para describir el movimiento de soluto en experimentos de transporte en columnas de suelo. Estos modelos pueden ser vistos como una generalización de los modelos clásicos ya que éstos son un caso particular de aquéllos. En este sentido los modelos fraccionarios simulan razonablemente bien las curvas de salida de los experimentos en columnas de suelo consideradas en este trabajo. Los valores del orden de la derivación fraccionaria α obtenidos variaron entre 1.05 y 2.00. De un total de 53 curvas de salida consideradas 28 fueron ajustadas con un valor de α menor que 2 y 23 con un valor igual a 2. Se han observado variaciones de los valores óptimos de α con el tipo de suelo, el tipo de trazador utilizado, el grado de saturación y la velocidad del fluido. Estas variaciones parecen indicar que la complejidad del movimiento de las partículas de soluto va acompañada de un valor del orden de derivación fraccionaria menor que 2.

Agradecimientos. El trabajo de F. San José Martínez y F. J. Taguas Coejo ha sido parcialmente financiado por Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Investigación Tecnológica (I+D+I) (AGL2004-04079 AGR), y DGUI (Comunidad de Madrid) y UPM (R05/10784).

Bibliografía

Benson, D.A., The fractional advection-dispersion equation: development and application, Ph.D. Thesis, University of Nevada, Reno, 1998.

Benson, D.A., Schumer, R., Meerschaert, M.M. y Wheatcraft, S.W., Fractional dispersion, Levy motion, and the MADE tracer tests, *Transp. Porous Media*, 42, 211-240, 2001.

Berkowitz, B., Cortis, A., Dentz, M. y Scher, H., Modeling non-Fickian Transport in geological formations as a continuous time random walk. *Reviews of Geophysics*, 44, 1-49, RG2003, 2006.

Bhattacharya, R. y Gupta, V.K., Application of the central limit theorem to solute transport in saturated porous media: from kinetic to field scales, in J.H Cushman (Editor), Dynamics of fluids in hierarchical porous media, Academic Press, New York, 97-124, 1990.

Biggar, J.W. y Nielsen, D.R. Miscible displacement in soils: II Behaviour of tracers, *Soil Sci. Soc. Proc.*, 26, 125-128, 1962.

Bouchard, J.P., More Lévy distributions in physics, in M.F. Shlesinger, G.M. Zaslavsky, U. Frisch (Editors), "Lévy flights and related topics in physics", Springer, New York, 239-250, 1995

Cassel, D.K., Krueger, T.H., Schroer, F.W. y Norum, E.B., Solute Movement Through Disturbed and Undisturbed Soil Cores, *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, 38, 36-40, 1974.

Compte, A, Stochastic foundations of fractional dynamics, *Phys. Rev. E*, 53(4), 4191-4193, 1996.

Jardine, P.M., Jacobs, G.K. y Wilson, G.V., Unsaturated transport processes in undisturbed heterogeneous porous media: I Inorganic contaminants, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 57, 945-953, 1993.

Jury, W.A y Flühlér, H., Transport of chemical through soil: mechanics,

- models and field experiments, *Advances in Agronomy*, 47, 141-201, 1992.
- Khan, A.U.H. y Jury, W.A., A laboratory test of the dispersion scale effect, *J. Contam. Hydrol.*, 5, 119-132, 1990.
- McMahon, M.A. y Thomas, G.W., Chloride and titrated water flow in disturbed and undisturbed soil cores. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, 28, 727-732, 1974.
- Meerschaert, M.M. y Tadjeran, C., Finite difference approximations for two-sided space-fractional partial differential equations, *Appl. Num. Math.*, 56, 80-90, 2006.
- Nielsen, D.R. y Biggar, J.W., Miscible displacement in soils: I Experimental information, *Soil Sci. Soc. Proc.*, 25, 1-4, 1961.
- Pachepsky, Y.A. Benson, D.A. y Rawls, W.J., Simulating scale-dependent solute transport in soils with the fractional advective-dispersive equation, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 64, 1234-1243, 2000.
- Rao, P.S.C., Green, R.E., Ahuja, L.R. y Davidson, J.M., Evaluation of a capillary bundle model for describing solute dispersion in aggregated soils, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 40:815-820, 1976.
- Samko, S.G., Kilbas, A.A y Marichev, O.I., Fractional integrals and derivatives: theory and applications, Gordon and Breach Science Publ., New York, 1993.
- San Jose Martinez F, Pachepsky Y.A., Rawls W, Solute transport simulated with the fractional advective-dispersive equation. In: Agrawal O, Tenreiro Machado JA, Sabatier J., Fractional derivatives and their applications. IDECT/CIE2005. ISBN: 0-7918-3766-1, 2005.
- Seyfried, M.S. y Rao, P.S.C., Solute transport in undisturbed columns of an aggregated tropical soil: Preferential flow effect, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 51, 1434-1444, 1987.
- van Genuchten, M.Th., Non-equilibrium transport parameters from miscible displacement experiments, Research Rep. No. 119. U.S. Salinity Laboratory, USDA-SEA-ARS, Riverside, CA, 1981.
- van Genuchten, M.Th. y Wierenga, P.J., Mass transfer in sorbing porous media. I. Analytical solutions, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 40, 473-481, 1976.
- Zhang, X., Crawford, J.W., Deeks, L.K., Stutter, M.I., Bengough, A.G. y Young, I.M., A mass balance based numerical method for the fractional advection-dispersion equation: theory and application, *Water Resour. Res.*, 41, W07029, doi: 10.1029/2004WR003818, 2005.