

ANÁLISIS MULTIFRACTAL DE LA VELOCIDAD DE FLUJO SIMULADA CON UN MODELO DE MALLA EN MEDIOS POROSOS BIDIMENSIONALES IDEALIZADOS

F.J. Jiménez-Hornero¹, J.V. Giráldez¹, A.M. Laguna²

¹ Departamento de Agronomía, Universidad de Córdoba, Apdo. Correos 3048, 14080-Córdoba (España),
Email: {ir2jihof, ag1gicej}@uco.es

² Departamento de Física Aplicada, Universidad de Córdoba, Apdo. Correos 3048, 14080-Córdoba (España),
Email: falalua@uco.es

RESUMEN. El flujo en un medio poroso es un fenómeno complejo que requiere una descripción lo más completa posible. En este trabajo se estudia la aplicación del análisis multifractal a la caracterización de este fenómeno ya que este método proporciona información adicional a la obtenida de otras alternativas frecuentemente usadas como la estadística descriptiva. El formalismo multifractal conocido como “strange attractor” ha sido empleado para describir el flujo en medios porosos bidimensionales idealizados. El módulo de la velocidad del fluido es simulado con un modelo de malla en dos medios de geometrías homogénea y heterogénea. Los resultados obtenidos del estudio de las funciones exponente de masa y de los espectros multifractales y de Rényi muestran que el flujo en los medios porosos considerados tiene una naturaleza multifractal que es más marcada conforme la geometría es más heterogénea. Los resultados obtenidos sugieren que este método puede aplicarse a la descripción del flujo de agua y solutos en el suelo.

ABSTRACT. The flow in a porous medium is a complex phenomenon that requires a complete description, which in this work is done by the application of a multifractal analysis because it gives additional information that cannot be obtained from other methods such as descriptive statistics. The strange attractor multifractal formalism has been used to describe the flow in idealised two-dimensional porous media. The magnitude of the fluid velocity is simulated with a lattice model in two porous media with homogeneous and heterogeneous geometries. The results obtained from the study of the mass exponent functions, the multifractal and Rényi spectra show that the flows in the porous media tested have a multifractal type of scaling that is stronger as the geometry becomes more heterogeneous. The results obtained suggest that this method can be extended to the analysis of water and solute flows in soils.

1.- Introducción

La descripción multifractal de una variable cuya medida es auto-similar en términos estadísticos implica que su

comportamiento complejo puede ser representado por una combinación de conjuntos fractales y sus correspondientes exponentes (Kravchenko et al., 1999). El análisis multifractal ha sido aplicado a la caracterización de diferentes propiedades del suelo, como la distribución del tamaño de partícula (Martín y Taguas, 1998; Grout et al., 1998; Posadas et al., 2001), la conductividad hidráulica (Liu y Molz, 1997; Giménez et al., 1999; Veneziano y Essiam, 2003; Tennekoon et al., 2003; Zeleke y Si, 2005; Perfect et al., 2006) y la porosidad (e.g. Posadas et al., 2003; Bird et al., 2006), o procesos que tienen lugar en él como los flujos inestables (Held y Illangasekare, 1995). Además, la distribución espacial de alguna de las propiedades del suelo como el contenido de materia orgánica, el pH o la conductividad eléctrica han demostrado ser multifractales (Kravchenko et al., 1999; Caniego et al., 2005; Zeleke y Si, 2006).

El flujo de un líquido en el suelo depende, entre otros factores, de la densidad y viscosidad del fluido y de la geometría de este medio poroso. Por tanto, es interesante comprobar si la distribución de los valores de la velocidad de un flujo en el suelo exhibe esta naturaleza multifractal y qué grado de relación tiene con la geometría del medio en el que tiene lugar. En este trabajo se responde a esta cuestión aplicando el análisis a escala de poro usando el modelo de malla de Bathnagar-Gross-Krook (BGK) propuesto por Chen et al. (1992) y Qian et al. (1992), que es una simplificación de su ancestro el modelo de malla de Boltzmann (e.g. Succi, 2001). El modelo BGK es simple y eficiente en la simulación de flujos en la presencia de configuraciones complejas de obstáculos como los que se encuentran a escala de poro en el suelo (Martys y Chen, 1996; Zhang et al., 2005; Jiménez-Hornero et al., 2005).

Con el objetivo de responder a la pregunta planteada anteriormente, el análisis multifractal es aplicado a la distribución del módulo de la velocidad simulada por el modelo de Boltzmann en dos medios porosos idealizados, uno de ellos de geometría homogénea y el otro heterogénea.

2.- Métodos

2.1. El modelo BGK

En el modelo BGK las partículas de fluido se mueven en una malla regular en la que cada nodo está relacionado

con sus vecinos de acuerdo a un tipo de vecindad que es elegido según la complejidad del fenómeno que se desea simular. El tipo de vecindad $d2Q9$ es usado frecuentemente para determinar con esta aproximación numérica el campo de velocidades de un flujo bidimensional (e.g. Succi, 2001). Así, $d = 2$ es el número de dimensiones y $Q = 9$ son las partículas consideradas, ocho móviles y una estática. La variable independiente f_k varía de forma continua entre 0 y 1 y representa la probabilidad de encontrar una partícula de fluido en el enlace k que conecta un nodo con su vecino. Las interacciones de partículas conservan la masa y la cantidad de movimiento (Rothman y Zaleski, 2001; Chopard y Droz, 1998).

La ecuación del modelo BGK para un nodo \mathbf{r} en el tiempo t , es (e.g. Succi, 2001)

$$f_k(\mathbf{r} + \Delta t \mathbf{c}_k, t + \Delta t) = \frac{1}{\omega} f_k^{\text{eq}}(\mathbf{r}, t) + \left(1 - \frac{1}{\omega}\right) f_k(\mathbf{r}, t) \quad (1)$$

donde \mathbf{c}_k es la velocidad de una partícula de fluido en el enlace k , que es definida por

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_k &= (0, 0) & (k = 0), \\ \mathbf{c}_k &= c \left(\cos\left(\frac{\pi(k-1)}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi(k-1)}{4}\right) \right) & (k = 1, 3, 5, 7), \quad (2) \\ \mathbf{c}_k &= \sqrt{2}c \left(\cos\left(\frac{\pi(k-1)}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi(k-1)}{4}\right) \right) & (k = 2, 4, 6, 8) \end{aligned}$$

donde $c = \Delta r / \Delta t$, con Δr siendo el espaciado de la malla.

f_k^{eq} es la función de equilibrio local y ω es el parámetro conocido como tiempo de relajación. Usando el desarrollo en serie de Chapman-Enskog se demuestra matemáticamente que las ecuaciones de Navier-Stokes de segundo orden de precisión pueden ser derivadas de la Ec. (1) si f_k^{eq} tiene la siguiente expresión (Chen y Doolen, 1998; Chopard y Droz, 1998; Succi, 2001):

$$\begin{aligned} f_k^{\text{eq}} &= \rho z_k \left[1 + \frac{c_{k\beta} v_\beta}{c_s^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{c_{k\beta} v_\beta}{c_s^2} \right)^2 - \frac{v_\beta v_\beta}{2c_s^2} \right], \quad \forall k \in [1, Q-1] \\ f_k^{\text{eq}} &= \rho z_k \left(1 - \frac{v_\beta v_\beta}{2c_s^2} \right), \quad k = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

En la Ec. (3) el convenio de suma de Einstein ha sido adoptado, v es la velocidad del fluido y $\beta = x, y$, representa a las dos coordenadas espaciales consideradas. z_k son factores ponderadores asociados con las posibles direcciones en las que pueden moverse las partículas del fluido en la malla y el valor del parámetro c_s es elegido según el tipo de vecindad seleccionado. En el caso del modelo $d2Q9$ se tiene que $c_s^2 = c^2/3$, $z_0 = 4/9$, $z_{1,3,5,7} = 1/9$ y $z_{2,4,6,8} = 1/36$.

La densidad ρ y velocidad del fluido \mathbf{v} son calculadas a partir de f_k según

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, t) &= \sum_{k=0}^{Q-1} f_k(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\sum_{k=0}^{Q-1} f_k(\mathbf{r}, t) \mathbf{c}_k}{\rho(\mathbf{r}, t)} \end{aligned} \quad (4)$$

La viscosidad cinemática, ν , se define como

$$\nu = \frac{\Delta r^2}{\Delta t} c_s^2 \left(\omega - \frac{1}{2} \right) \quad (5)$$

En este trabajo se asume que $\Delta r = \Delta x = \Delta y = 1$ unidades de malla (l.u.) y $\Delta t = 1$ ciclo de tiempo o “time-step” (ts) tal y como se adopta frecuentemente en las simulaciones realizadas con modelos de malla (Succi, 2001).

2.2.- Características de las simulaciones realizadas con el modelo BGK

El dominio bidimensional de cálculo está representado por un cuadrado de 256 l.u. de lado. Dos medios porosos idealizados fueron considerados: el primero de ellos estaba formado por discos dispuestos en un patrón regular, dando lugar a un medio de geometría homogénea en el que todos los poros estaban hidráulicamente conectados y con una porosidad $\varepsilon = 0.45$ cuando el radio de los discos se seleccionó de forma aleatoria entre 6 y 7 l.u.; el segundo medio poroso, de geometría heterogénea, fue obtenido aplicando la malla fractal aleatoria propuesta por Rappoldt y Crawford (1999) en la que la porosidad es determinada por $\varepsilon = 1 - p^\theta$, donde p es la probabilidad de que un nodo sea matriz del suelo y $\theta \geq 1$ es el número de niveles de recursión, 4 en este trabajo. El medio poroso heterogéneo simulado tenía una porosidad $\varepsilon = 0.7$ ($p = 0.74$). De acuerdo con Rappoldt y Crawford (1999) el valor seleccionado para ε garantizaba la continuidad del espacio poroso ya que $\varepsilon > 0.6$.

El flujo fue establecido en la dirección x asignando en la primera columna una velocidad inicial del fluido $\mathbf{v} = (0.1, 0)$ l.u.ts⁻¹. La condición periódica fue aplicada en todos los bordes del dominio de cálculo y la interacción entre el fluido y la matriz sólida del suelo se determinó por el uso del método del rebote o “bounce-back” (e.g. Chen et al., 1996; He et al., 1997). Las simulaciones comenzaron con velocidad cero en todos los lugares del dominio, finalizando una vez que el flujo alcanzó el régimen permanente según el criterio $\max_{\mathbf{r}} |v(\mathbf{r}, t + \Delta t) - v(\mathbf{r}, t)| \leq 10^{-7}$ l.u.ts⁻¹ que debe ser satisfecho por el módulo de la velocidad del fluido, $v(\mathbf{r}, t) = (v_x^2(\mathbf{r}, t) + v_y^2(\mathbf{r}, t))^{0.5}$. El parámetro del tiempo de relajación fue $\omega = 0.95$ en todas las pruebas. Los valores de

$v(\mathbf{r}, t)$ simulados con el modelo BGK para el flujo en régimen permanente fueron los valores iniciales v_{ini} considerados para llevar a cabo el análisis multifractal descrito a continuación.

2.3. Análisis multifractal

El formalismo conocido como “strange attractor” (e.g. Hentschel y Procaccia, 1983; Grassberger, 1983; Halsey et al., 1986) fue usado para realizar el análisis multifractal del módulo de la velocidad de un flujo en régimen permanente simulado en los dos medios porosos idealizados bidimensionales antes descritos. Para ello, un conjunto de diferentes mallas con celdas cuadradas de lado δ fue superpuesto sobre los medios porosos estudiados. El módulo de la velocidad del flujo v_i y δ caracterizaron a cada celda i . El mínimo valor de δ , δ_{ini} , fue seleccionado de tal forma que cada celda inicial contuviera al menos un dato del módulo de la velocidad del fluido v_{ini} . Cuando había más de un dato en una celda, se consideraba su promedio. Así, la función de probabilidad de masa $v_i(\delta)$ fue definida en cada celda i como (e.g. Kravchenko et al., 1999)

$$v_i(\delta) = \frac{v_i}{\sum_{j=1}^{n_{ini}} (v_{ini})_j} \quad (6)$$

donde v_i fue calculada en base a los valores v_{ini} y n_{ini} es el número de celdas iniciales de lado δ_{ini} . La distribución de $v_i(\delta)$ fue analizada usando el método de los momentos (Evertsz y Mandelbrot, 1992), en el que la función de partición $\chi(q, \delta)$ de orden q es calculada a partir de los valores de $v_i(\delta)$:

$$\chi(q, \delta) = \sum_{i=1}^n [v_i(\delta)]^q \quad (7)$$

con n siendo el número de celdas de lado δ y $q \in (-\infty, \infty)$. La función de partición tiene la siguiente propiedad para una medida multifractal

$$\chi(q, \delta) \sim \delta^{\tau(q)} \quad (8)$$

donde $\tau(q)$ es una función no lineal de q (Feder, 1988), conocida como la función exponente de masa. Para cada valor de q , $\tau(q)$ puede ser obtenida como la pendiente del segmento lineal de un gráfico log-log de $\chi(q, \delta)$ frente a δ . Para $q \gg 1$, el valor de $\chi(q, \delta)$ está principalmente determinado por los mayores valores de los datos, mientras que la contribución de los valores más

pequeños es más importante cuando $q \ll -1$ (Kravchenko et al., 1999). El exponente de Lipschitz-Hölder o de singularidad α cuantifica la importancia de las singularidades de la medida de una variable. Su valor se calcula de la relación $v_i(\delta) \sim \delta^\alpha$, cuando $\delta \rightarrow 0$. α también es conocido como la dimensión fractal local y puede ser determinado de la transformación de Legendre de la curva $\tau(q)$ (Evertsz y Mandelbrot, 1992):

$$\alpha(q) = \frac{d\tau(q)}{dq} \quad (9)$$

Si $N(\alpha, \delta)$ es el número de celdas de lado δ en las que existe el mismo valor de α , $f(\alpha)$ se define a partir de la siguiente relación:

$$N(\alpha, \delta) \sim \delta^{-f(\alpha)} \quad (10)$$

$f(\alpha)$ puede ser considerada como la dimensión fractal del conjunto de celdas correspondientes a una singularidad α . Un gráfico de $f(\alpha)$ frente a α se denomina espectro multifractal. $f(\alpha)$ puede ser calculado de (Chhabra y Jensen, 1989; Chhabra et al., 1989)

$$f[\alpha(q)] = q\alpha(q) - \tau(q) \quad (11)$$

El espectro es una parábola invertida cuando $v_i(\delta)$ está distribuida multifractalmente con un intervalo de valores de α más amplio conforme la heterogeneidad de la distribución aumenta. En el caso de una distribución monofractal de $v_i(\delta)$, el espectro multifractal es un único punto ya que el valor de α es el mismo para todas las celdas del mismo tamaño (e.g. Kravchenko et al., 1999).

La naturaleza multifractal de la medida de una variable es caracterizada primeramente por su espectro. Una representación cuantitativa del patrón completo de la velocidad de un flujo en un medio poroso requiere un número infinito de parámetros. Sin embargo, desde el punto de vista de la aplicación práctica, un modelo multifractal con un número pequeño de parámetros como las dimensiones de Rényi o generalizadas (Rényi, 1970) puede ser usado (Caniego et al., 2003; Montero, 2005). Las dimensiones generalizadas, $D(q)$, son calculadas a partir de la función exponente de masa (Hentschel y Procaccia, 1983)

$$D(q) = \frac{\tau(q)}{q-1} \quad (12)$$

$D(0)$ es la denominada dimensión de capacidad del soporte geométrico de la medida de una variable, en este caso

$D(0) = d = 2$. $D(1)$ es la dimensión fractal de información, obtenida aplicando la regla de L'Hôpital a la Ec. (12) para $q = 1$ (e.g. Zeleke y Si, 2004). $D(1)$ proporciona información sobre el grado de heterogeneidad de la medida. $D(2)$ es la dimensión fractal de correlación y determina la distribución promediada de la medida (Grassberger y Procaccia, 1983). Mientras que el espectro multifractal es una función cóncava, el espectro de Rényi $D(q)$ es una función decreciente respecto a q para una medida multifractalmente distribuida (Turcotte, 1997; Caniego et al., 2005).

3.- Resultados

Las Figs. 1(a) y 1(b) muestran el módulo de la velocidad de flujo simulada por el modelo de malla BGK propuesto para los dos medios porosos idealizados analizados en este trabajo. Puede comprobarse que, tanto en condiciones de geometría homogénea como heterogénea, el fluido solamente fluye a través de unos pocos canales principales donde la velocidad es mucho mayor que en el resto de poros.

El valor mínimo del lado de cada celda cuadrada para realizar el análisis multifractal de los campos de velocidades mostrados en las Figs. 1(a) y 1(b) fue $\delta_{mi} = 8$ l.u.. Las Figs. 2(a) y 2(b) muestran la función de partición de v , $\chi(q, \delta)$, frente al tamaño de celda, representado por su lado δ , obtenidas para el medio poroso de geometría homogénea y heterogénea, respectivamente. Para todos los momentos estadísticos analizados, $q \in [-10, 10]$, las funciones $\log[\chi(q, \delta)]$ son líneas rectas significando que la distribución espacial de v puede ser considerada como multifractal. El coeficiente de determinación, r^2 , fue mayor que 0.99 en todos los ajustes mostrados en las Figs. 2(a) y 2(b). Las funciones exponente de masa de v , $\tau(q)$, se obtuvieron a partir de las pendientes de los ajustes antes mencionados y son mostradas en la Fig. 3 para los dos medios porosos considerados. Se puede comprobar cómo las pendientes de $\tau(q)$ son diferentes para $q < 0$ y para $q > 0$ en ambos casos. Las curvas $\tau(q)$ son convexas y distintas de la línea recta que se corresponde con el caso monofractal. Esta diferencia es mayor conforme la heterogeneidad geométrica del medio se incrementa.

Los espectros multifractales $f(\alpha)$ de v obtenidos para los dos casos estudiados se muestran en la Fig. 4. Puede observarse cómo el espectro es más ancho conforme mayor es la heterogeneidad geométrica del medio poroso. Los valores altos y bajos del módulo de la velocidad del flujo están relacionados con la parte izquierda y derecha del espectro, respectivamente (e.g. Kravchenko et al.,

1999). El mayor valor de $f(\alpha)$ se corresponde con la dimensión de capacidad del soporte geométrico. Los espectros de la Fig. 4 son parábolas invertidas, hecho que prueba la distribución multifractal de v . Puede comprobarse que la cola de los espectros situada a la izquierda del máximo de $f(\alpha)$ es más larga para el caso del medio poroso heterogéneo. Éste es el resultado de una mayor diversidad de los valores del módulo de la velocidad del flujo comparada con la uniformidad de valores de la misma variable en el medio geoméricamente más homogéneo.

Los espectros de Rényi del módulo de la velocidad del flujo v pueden apreciarse en la Fig. 5 para los dos medios porosos considerados. En ambos casos $D(q)$ es una función decreciente con $D(0) = 2 > D(1) > D(2)$ demostrando nuevamente que v tiene una distribución de carácter multifractal.

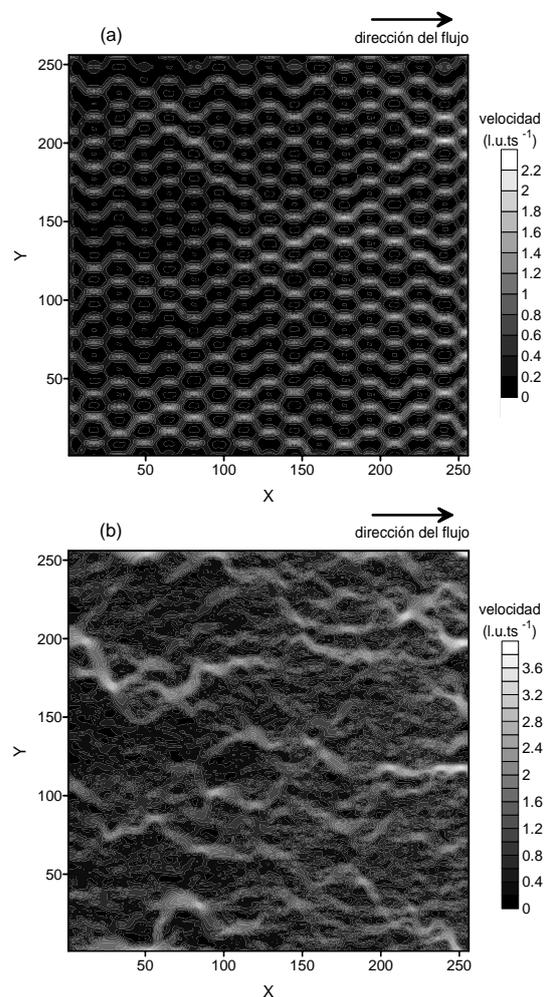


Fig. 1. Distribución espacial del módulo de la velocidad de flujo simulada por el modelo de malla BGK para dos medios porosos idealizados de geometría (a) homogénea y (b) heterogénea.

El parámetro $w = D(0) - D(1)$ es adecuado para describir los espectros multifractales (Muller et al., 1995). Así, un mayor valor de w implica un espectro más ancho y una distribución más heterogénea de la variable estudiada. Los

valores obtenidos para w fueron 0.0123 para el medio geoméricamente homogéneo y 0.0274 para el heterogéneo. Estos valores son coherentes con lo observado en las Figs 1(a), 1(b) y 4.

4.- Conclusiones

Usando el modelo de malla BGK se ha simulado a escala de poro el flujo en dos medios porosos bidimensionales idealizados de geometrías homogénea y heterogénea. El análisis multifractal se ha aplicado para describir la distribución del módulo de la velocidad del flujo. En ambos casos, los resultados obtenidos de los gráficos de las funciones exponente de masa determinan que esta variable tiene un comportamiento diferente al detectado en el caso monofractal. Los espectros multifractales revelan una mayor diversidad de valores en el módulo de la velocidad de flujo conforme la heterogeneidad geométrica del medio aumenta. Esta circunstancia fue confirmada por los resultados obtenidos del estudio de los espectros de Rényi.

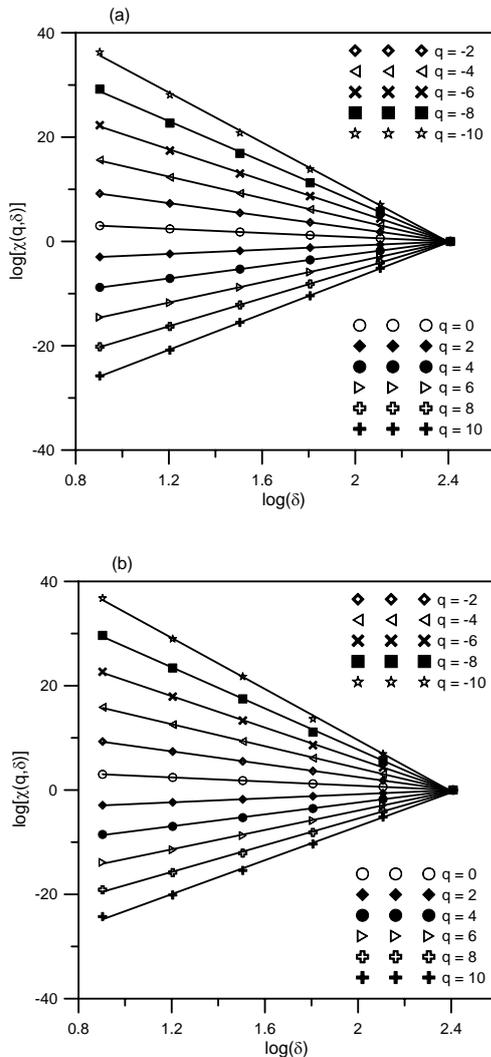


Fig. 2. Funciones de partición $\chi(q, \delta)$ del módulo de la velocidad de

flujo v , obtenidas para determinados valores de orden q , considerando diferentes lados de celda δ para los dos medios porosos idealizados de geometría (a) homogénea y (b) heterogénea analizados.

El análisis multifractal se ha mostrado como una herramienta adecuada y eficiente para caracterizar el flujo en medios porosos idealizados. Los resultados obtenidos sugieren que este tipo de análisis puede ser extendido a un medio poroso real como el suelo.

Agradecimientos. Los autores agradecen la ayuda del Proyecto AGL2006-10927-C03-03/AGR del Ministerio de Educación y Ciencia de España. F.J. Jiménez-Hornero está contratado con cargo a las Ayudas para facilitar el Retorno de Investigadores a Centros de Investigación y Universidades de Andalucía de la Consejería de Innovación, Ciencia y Empresa de la Junta de Andalucía.

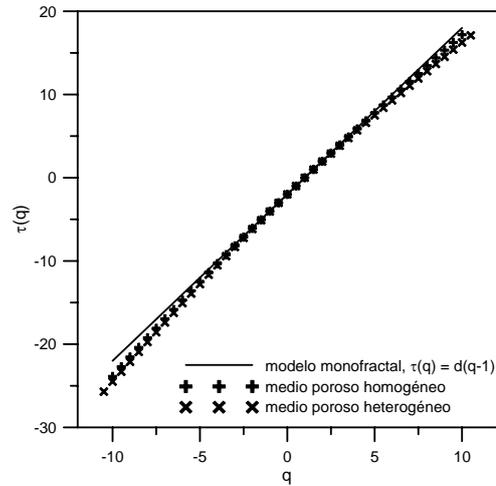


Fig. 3. Funciones exponente de masa $\tau(q)$ del módulo de la velocidad de flujo v .

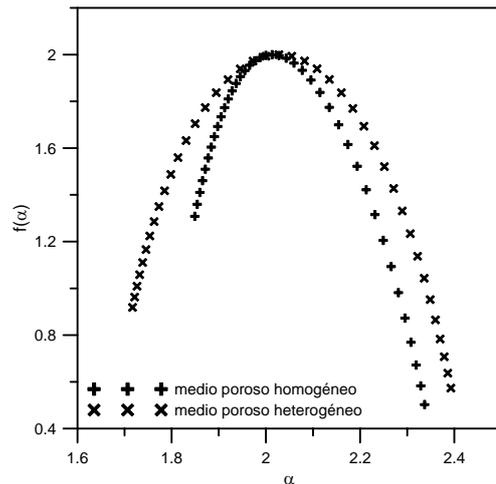


Fig. 4. Espectros multifractales $f(\alpha)$ del módulo de la velocidad del flujo v .

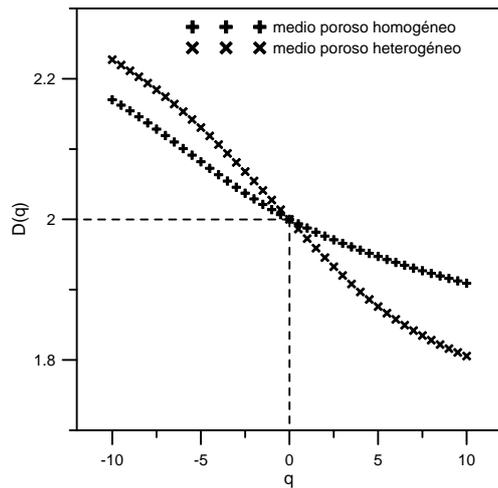


Fig. 5. Espectros de Rényi $D(q)$ del módulo de la velocidad del flujo v

Bibliografía

- Bird, N., Diaz, M.C., Saa, A., y Tarquis, A.M., 2006. Fractal and multifractal analysis of pore-scale images of soil. *J. Hydrol.*, 322, 211–219.
- Caniego, F.J., Martin, M.A., y San Jose, F., 2003. Rényi dimensions of soil pore size distribution. *Geoderma*, 112, 205–216.
- Caniego, F.J., Espejo, R., Martin, M.A., y San Jose, F., 2005. Multifractal scaling of soil spatial variability. *Ecol. Model.*, 182, 291–303.
- Chen, S., y Doolen, G.D. 1998. Lattice Boltzmann method for fluid flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 30, 329–364.
- Chen, S., Martinez, D., y Mei, R., 1996. On boundary conditions in lattice Boltzmann methods. *Phys. Fluids*, 8, 2527–2536.
- Chen, S., Wang, Z., Shan, X., y Doolen, G., 1992. Lattice Boltzmann computational fluid dynamics in three dimensions. *J. Stat. Phys.*, 68, 379–400.
- Chhabra, A.B., y Jensen, R.V., 1989. Direct determination of the $f(\alpha)$ singularity spectrum. *Phys. Rev. Lett.*, 62, 1327–1330.
- Chhabra, A.B., Meneveau, C., Jensen, R.V., y Sreenivasan, K.R., 1989. Direct determination of the $f(\alpha)$ singularity spectrum and its application to fully developed turbulence. *Phys. Rev. A*, 40, 5284–5294.
- Chopard, B., y Droz, M., 1998. *Cellular Automata modeling of physical systems*. Cambridge University Press. Cambridge.
- Evertsz, C.J.G., y Mandelbrot, B.B., 1992. Multifractal measures (Appendix B), en *Chaos and Fractals*, editado por H.O. Peitgen et al., pp. 922–953. Springer-Verlag, New York.
- Feder, J., 1988. *Fractals*. Plenum Press, New York.
- Giménez, D., Rawls, W.J., y Lauren, J.G., 1999. Scaling properties of saturated hydraulic conductivity in soil. *Geoderma*, 88, 205–220.
- Grassberger, P., 1983. Generalized dimensions of strange attractors. *Phys. Lett. A*, 97, 227–230.
- Grassberger, P., y Procaccia, I., 1983. Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D*, 9, 189–208.
- Grout, H., Tarquis, A.M., y Wiesner, M.R., 1998. Multifractal analysis of particle size distributions in soil. *Environ. Sci. Technol.*, 39, 1176–1182.
- Halsey, T.C., Jensen, M.H., Kadanoff, L.P., Procaccia, I., y Shraiman, B.I., 1986. Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets. *Phys. Rev. A*, 33, 1141–1151.
- He, X.Y., Zou, Q.S., Luo, L.S., y Dembo, M., 1997. Analytic solutions of simple flows and analysis of nonslip boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model. *J. Stat. Phys.*, 87, 115–136.
- Held, R.J., y Illangasekare, T.H., 1995. Fingering of the dense nonaqueous phase liquids in porous media. 2. Analysis and classification. *Water Resour. Res.*, 31, 1223–1231.
- Hentschel, H.G.E., y Procaccia, I., 1983. The Infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors. *Physica D*, 8, 435–444.
- Jiménez-Hornero, F.J., Giráldez, J.V. y Laguna, A., 2005. Description of sorbing tracers transport in fractured media using the lattice model approach. *J. Contam. Hydrol.*, 81, 187–204. Con correcciones en *J. Contam. Hydrol.*, 83 (2006), 237–238.
- Kravchenko, A.N., Boast, C.W. y Bullock, D.G., 1999. Multifractal analysis of soil spatial variability. *Agron. J.*, 91, 1033–1041.
- Liu, H.H., y Molz, F.J., 1997. Multifractal analyses of hydraulic conductivity distributions. *Water Resour. Res.*, 33, 2483–2488.
- Martin, M.A., y Taguas, F.J., 1998. Fractal modelling, characterization and simulation of particle-size distributions in soil. *Proc. R. Soc. A-Math. Phys. Eng. Sci.*, 454, 1457–1468.
- Martys, N., y Chen, H., 1996. Simulation of multicomponent fluids in complex three-dimensional geometries by the lattice Boltzmann method. *Phys. Rev. E*, 53, 743–750.
- Montero, E., 2005. Rényi dimensions analysis of soil particle-size distributions. *Ecol. Model.*, 182, 305–315.
- Muller, J., Huseby, O.K., y Saucie, A., 1995. Influence of multifractal scaling of pore geometry on permeabilities of sedimentary rocks. *Chaos Soliton. Fract.*, 5, 1485–1492.
- Perfect, E., Gentry, R.W., Sukop, M.C., y Lawson, J.E., 2006. Multifractal Sierpinski carpets: Theory and application to upscaling effective saturated hydraulic conductivity. *Geoderma*, 134, 240–252.
- Posadas, A.N.D., Giménez, D., Bittelli, M., Vaz, C.M.P., y Flury, M., 2001. Multifractal characterization of soil particle-size distributions. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 65, 1361–1367.
- Posadas, A.N.D., Giménez, D., Quiroz, R., y Protz, R., 2003. Multifractal characterization of soil pore systems. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 67, 1361–1369.
- Qian, Y.H., D’Humières, D., y Lallemand, P., 1992. Lattice BGK models for Navier-Stokes equation. *Europhys. Lett.*, 17, 479–484.
- Rappoldt, C., y Crawford, J.W., 1999. The distribution of anoxic volume in a fractal model of soil. *Geoderma*, 88, 329–347.
- Rényi, A., 1970. *Probability Theory*. North-Holland, Amsterdam.
- Rothman, D.H., y Zaleski, S., 1997. *Lattice-gas cellular automata. Simple models of complex hydrodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Succi, S., 2001. *The lattice Boltzmann equation for fluid dynamics and beyond. Numerical mathematics and scientific computation*. Oxford University Press, Oxford.
- Tennekoon, L., Boufadel, M.C., Lavallo, D., y Weaver, J., 2003. Multifractal anisotropic scaling of hydraulic conductivity. *Water Resour. Res.*, 39, 1193, doi:10.1029/2002WR001645.
- Turcotte, D.L., 1997. *Fractals and chaos in geology and geophysics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Veneziano, D., y Essiam, A. K., 2003. Flow through porous media with multifractal hydraulic conductivity. *Water Resour. Res.*, 39, 1166, doi:10.1029/2001WR001018.
- Zeleke, T.B., y Si, B.C., 2004. Scaling properties of topographic indices and crop yield: multifractal and joint multifractal approaches. *Agron. J.*, 96, 1082–1090.
- Zeleke, T.B., y Si, B.C., 2005. Scaling relationships between saturated hydraulic conductivity and soil physical properties. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 69, 1691–1702.
- Zeleke, T.B., y Si, B.C., 2006. Characterizing scale-dependent spatial relationships between soil properties using multifractal techniques. *Geoderma*, 134, 440–452.
- Zhang, X.X., Deeks, L.K., Bengough, A.G., Crawford, J.W., y Young, I.M., 2005. Determination of soil hydraulic conductivity using lattice Boltzmann method and thin-section technique. *J. Hydrol.*, 306, 59–70.